ODR I. Cvičení 4.

Věta. Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je C^2 funkce. Potom řešicí funkce φ úlohy

$$x' = f(x,t),\ x(t_0) = x_0$$

je dvakrát diferencovatelná vůči x_0. Druhá derivace φ podle x_0 ve směrech w, z, $D_z D_w \varphi$ je řešením soustavy

$$\begin{cases} x' = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0, \\ u' = [\nabla_x f(x,t)]u, \quad u(t_0) = w, \\ y' = [\nabla_x f(x,t)]y, \quad y(t_0) = z, \\ v' = [\nabla_x [\nabla_x f(x,t)]u]y + [\nabla_x f(x,t)]v, \quad v(t_0) = 0. \end{cases}$$

Úlohy.

1. Spočítejte $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}(t; 0, x_0)$ v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ pro rovnici

$$x' = e^{2x} - e, \quad x(0) = x_0.$$

2. Nechť $x = \psi(t,\lambda)$ řeší úlohu $x' = x + \sin x,\ x(0) = \lambda$. Najděte $\frac{\partial \psi(t,0)}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \psi(t,0)}{\partial \lambda^2}$.
3. Nechť $x = \psi(t,\lambda)$ řeší úlohu $x' = \lambda(1-t) + x - x^2,\ x(0) = 0$. Najděte $\frac{\partial \psi(t,0)}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \psi(t,0)}{\partial \lambda^2}$.
4. Nechť $x = \psi(t,\lambda)$ řeší úlohu $x' = f(t,x,\lambda),\ x(0) = 0$. Najděte $\frac{\partial \psi(t,2)}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \psi(t,2)}{\partial \lambda^2}$.

   (a) $f = 2tx + \lambda(2t + x^2)$, (b) $f = -2tx + \lambda(x^2 - 2t)$.

ODR I. Cvičení 4.

Věta. Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je C^2 funkce. Potom řešicí funkce φ úlohy

$$x' = f(x,t),\ x(t_0) = x_0$$

je dvakrát diferencovatelná vůči x_0. Druhá derivace φ podle x_0 ve směrech w, z, $D_z D_w \varphi$ je řešením soustavy

$$\begin{cases} x' = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0, \\ u' = [\nabla_x f(x,t)]u, \quad u(t_0) = w, \\ y' = [\nabla_x f(x,t)]y, \quad y(t_0) = z, \\ v' = [\nabla_x [\nabla_x f(x,t)]u]y + [\nabla_x f(x,t)]v, \quad v(t_0) = 0. \end{cases}$$

Úlohy.

1. Spočítejte $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}(t; 0, x_0)$ v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ pro rovnici

$$x' = e^{2x} - e, \quad x(0) = x_0.$$

2. Nechť $x = \psi(t,\lambda)$ řeší úlohu $x' = x + \sin x,\ x(0) = \lambda$. Najděte $\frac{\partial \psi(t,0)}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \psi(t,0)}{\partial \lambda^2}$.
3. Nechť $x = \psi(t,\lambda)$ řeší úlohu $x' = \lambda(1-t) + x - x^2,\ x(0) = 0$. Najděte $\frac{\partial \psi(t,0)}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \psi(t,0)}{\partial \lambda^2}$.
4. Nechť $x = \psi(t,\lambda)$ řeší úlohu $x' = f(t,x,\lambda),\ x(0) = 0$. Najděte $\frac{\partial \psi(t,2)}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \psi(t,2)}{\partial \lambda^2}$.

   (a) $f = 2tx + \lambda(2t + x^2)$, (b) $f = -2tx + \lambda(x^2 - 2t)$.